Die metrische Theorie der Kettenbrüche seit Gauß

Rieger, Georg Johann

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 27, 1977, S.103-117

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Die metrische Theorie der Kettenbrüche seit Gauß

Von Georg Johann Rieger

Die regelmäßigen Kettenbrüche gehören zum klassischen Bestand der Zahlentheorie und damit der Mathematik. Sie waren schon in der Antike bekannt wie etwa im Zusammenhang mit dem euklidischen Algorithmus. Ihre zusammenhängende Theorie wurde in neuerer Zeit vor allem durch Huygens, Leibniz, Euler und Lagrange begründet. Es ist nicht unsere Absicht, diese Entwicklung darzustellen; wir verweisen dafür auf [12]. Vielmehr wollen wir uns hier mit einem Aspekt der Theorie der Kettenbrüche befassen, der von Gauß seinen Ausgang nahm und den man heute „Metrische Theorie der Kettenbrüche" nennt.

Teil 1 behandelt die metrische Theorie der Kettenbrüche irrationaler Zahlen. In § 1 befassen wir uns so mit dem Kernstück der metrischen Theorie der regelmäßigen Kettenbrüche, nämlich dem Satz von Gauß-Kusmin-Lévy. In § 2 wird im Zusammenhang mit dem Gauß-Maß γ dann allgemeiner „Mischung" bei regelmäßigen Kettenbrüchen erörtert und damit auch „Ergodizität". In § 3 werden dann einige Anwendungen des Ergodensatzes auf regelmäßige Kettenbrüche gegeben. Es schließt sich an die Verallgemeinerung der vorhergehenden Ergebnisse auf die wohl interessantesten halbregelmäßigen Kettenbrüche, nämlich die nach nächsten Ganzen in § 4 und die singulären Kettenbrüche in § 5.

Teil 2 behandelt die metrische Theorie der Kettenbrüche rationaler Zahlen. In § 6 befassen wir uns so im Anschluß an Heilbronn mit der durchschnittlichen Länge des regelmäßigen Kettenbruchs einer rationalen Zahl. Es schließt sich an die Verallgemeinerung dieser Ergebnisse auf die Kettenbrüche nach nächsten Ganzen in § 7.

Teil 1. Kettenbrüche irrationaler Zahlen

§ 1. Für $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ bezeichne $[\alpha,\beta]$ das abgeschlossene Intervall mit den Endpunkten α,β; so ist $[\alpha,\beta]=[\beta,\alpha]$. Es sei $X:=[0,1]\setminus\mathbb{Q}$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ bezeichne $[\alpha]$ die durch $\alpha-1<[\alpha]\leq\alpha$ charakterisierte Zahl aus $\mathbb{Z}$; $[\alpha]$ heißt größtes Ganzes von α. Für $\xi \in X$ sei

$$a(\xi):=\left[\frac{1}{\xi}\right],\ S(\xi):=\frac{1}{\xi}-a(\xi);$$

dann ist

$$a(\xi)\in\mathbb{N},\ S(\xi)\in X,\ \xi=\frac{1}{a(\xi)+S(\xi)}\ \text{O}.$$

So macht man weiter durch Iteration und erhält für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n(\xi):=a\left(S^{n-1}(\xi)\right)$ zunächst

$$\xi = \cfrac{1}{a_1(\xi) + \cfrac{1}{a_2(\xi) + \cdots + \cfrac{1}{a_n(\xi) + S^n(\xi)}}}$$

und durch Grenzübergang

$$\xi = \cfrac{1}{a_1(\xi) + \cfrac{1}{a_2(\xi) + \ddots}} \tag{1.1}$$

Im Zusammenhang mit (1.1) sagt man, daß $\xi \in X$ in einen regelmäßigen (oder gewöhnlichen oder üblichen oder euklidischen) Kettenbruch entwickelt worden sei. S heißt Shift (oder Verschiebungsoperator) bei regelmäßigen Kettenbrüchen. Vermöge

$$\xi \longmapsto \left(a_1(\xi), a_2(\xi), \ldots\right)$$

erhält man eine bijektive Abbildung zwischen X und der Menge aller Folgen (a_n: $n \geq 1$) mit $a_n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 1$). Es bezeichne λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \alpha \leq 1$ und für $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ sei

$$F_n(\alpha) := \lambda\{\xi \in X : S^n(\xi) \leq \alpha\}.$$

Man hat $F_0(\alpha) = \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq 1$) und die Rekursionsformel

$$F_{n+1}(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(F_n\left(\frac{1}{k}\right) - F_n\left(\frac{1}{k+\alpha}\right)\right) \qquad (0 \leq \alpha \leq 1,\ n \geq 0). \tag{1.2}$$

Man gelangt zu einer richtigen Formel, wenn man in (1.2) sowohl $F_{n+1}(\alpha)$ als auch $F_n(\alpha)$ durch $\log(1+\alpha)$ ersetzt. Es sei

$$R_n(\alpha) := F_n(\alpha) - \frac{\log(1+\alpha)}{\log 2} \qquad (0 \leq \alpha \leq 1,\ n \geq 0).$$

Gauß hat sich spätestens im Jahre 1800 mit $F_n(\alpha)$ beschäftigt[1]); in einem Brief aus dem Jahre 1812 an Laplance sagt er, er habe

$$\lim_{n \to \infty} R_n(\alpha) = 0 \qquad (0 \leq \alpha \leq 1) \tag{1.3}$$

bewiesen und bemühe sich darüberhinaus um die Konvergenzgeschwindigkeit[2]); nähere Einzelheiten sind uns nicht bekannt. Den ersten veröffentlichten Beweis von (1.3) gab Kusmin [10] im Jahre 1928; Lévy [11] gab im Jahre 1929 einen weiteren, unabhängigen Beweis von (1.3); nach Kusmin existieren reelle Zahlen $C_1 > 0$, $C_2 > 1$ mit

$$|R_n(\alpha)| < C_1 C_2^{-\sqrt{n}} \qquad (0 \leq \alpha \leq 1,\ n \geq 0); \tag{1.4}$$

[1]) Vgl. [4], S. 552–558; Gauß spricht natürlich nicht von Lebesgue-Maß, sondern von Wahrscheinlichkeit.

[2]) Vgl. [4], S. 371–374.

nach Lévy existieren reelle Zahlen $C_3 > 0$, $C_4 > 1$ mit

$$|R_n(\alpha)| < C_2 C_3^{-n} \qquad (0 \leq \alpha \leq 1,\ n \geq 0). \tag{1.5}$$

Ergebnisse dieser Art faßt man heute unter der Überschrift „Metrische Theorie der Kettenbrüche" zusammen. Durch (1.4) wie auch (1.5) ist natürlich (1.3) bewiesen, und man spricht vom Satz von Gauß-Kusmin-Lévy. Für große n ist (1.5) schärfer als (1.4). Die Methoden von Kusmin und Lévy sind wesentlich verschieden. Szüsz schlägt in [21] und [22] einen Weg ein, der beide Methoden vereinheitlicht und vereinfacht. So führt (1.2) auf eine kontrahierende Abbildung für $\big(F_n'(\alpha)(1+\alpha)\big)'$.

In Fortsetzung dieses Weges beweist Wirsing [23], daß es reelle Zahlen $C_5 > 0$, $C_6 > 0$ gibt mit

$$C_5\,\alpha(1-\alpha)\,0{,}302^n \leq (-1)^{n+1} R_n(\alpha) \leq C_6 (1-\alpha)\,0{,}305^n \qquad (0 \leq \alpha \leq 1,\ n \geq 0) \tag{1.6}$$

und bestimmt darüberhinaus die in einem gewissen Sinn bestmögliche Zahl, die in (1.6) an die Stelle von 0,302 und 0,305 treten kann. In [23] wird noch die Frage aufgeworfen, ob man aus dem nunmehr entstehenden Restglied weitere Terme herausziehen kann.

§ 2. Es sei $n \in \mathbb{N}$, $i_j \in \mathbb{N}\,(1 \leq j \leq n)$, $a_j \in \mathbb{N}\,(1 \leq j \leq n)$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$,

$$A^{i_1 \ldots i_n}_{a_1 \ldots a_n} := \{\xi \in X : a_{i_j}(\xi) = a_j\ (1 \leq j \leq n)\}.$$

Für $0 \leq s \in \mathbf{Z}$ findet man leicht

$$S^{-s}\big(A^{i_1 \ldots i_n}_{a_1 \ldots a_n}\big) = A^{i_1+s \ldots i_n+s}_{a_1 \ldots a_n}. \tag{2.1}$$

Für jedes Lebesgue-meßbare $E \subset [0,1]$ sei

$$\gamma(E) := \frac{1}{\log 2} \int_E \frac{d\sigma}{1+\sigma}.$$

Es ist $\gamma([0,1]) = 1$. Für $0 \leq \alpha \leq 1$ ist

$$S^{-1}[0,\alpha] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big[\frac{1}{k+\alpha}, \frac{1}{k}\Big],$$

$$\gamma(S^{-1}[0,\alpha]) = \gamma([0,\alpha]). \tag{2.2}$$

(2.2) ist nicht richtig für das näherliegende λ statt γ. Wegen (2.2) heißt γ das bei S invariante (Gauß-)Maß. (2.1) und (2.2) ergeben leicht

$$\gamma\big(A^{i_1 \ldots i_n}_{a_1 \ldots a_n}\big) = \gamma\big(A^{i_1+s \ldots i_n+s}_{a_1 \ldots a_n}\big) \qquad (s \in \mathbb{N}).$$

Die Methode, die zum Beweis von (1.5) führte, liefert [3])

[3]) Vgl. etwa [8], S. 376–381.

Satz 2.1 *Es gibt eine reelle Zahl* $C_7 > 1$ *derart, daß für beliebige ganze Zahlen* $k \geq 1, m \geq 0, s \geq 1, a_j \geq 1$ $(0 < j \leq k \vee k+m < j \leq k+m+s)$ *gilt*

$$\gamma\left(A^{1\ldots k}_{a_1\ldots a_k} \cap A^{k+m+1\ldots k+m+s}_{a_{k+m+1}\ldots a_{k+m+s}}\right) =$$
$$\gamma\left(A^{1\ldots k}_{a_1\ldots a_k}\right)\gamma\left(A^{k+m+1\ldots k+m+s}_{a_{k+m+1}\ldots a_{k+m+s}}\right)\left(1+O\left(C_7^{-m}\right)\right)$$

mit einer absoluten Konstanten in $O(\ )$.

Satz 2.1 bringt die (gleichmäßige) Mischungseigenschaft von S bezüglich γ zum Ausdruck.

§ 3. Es sei $E \subset [0,1]$ eine Borel-Menge. Knopp [9] hat schon 1926 bewiesen

(3.1) $$(S^{-1}(E) = E \wedge \lambda(E) < 1) \Rightarrow \lambda(E) = 0.$$

Dafür sagt man auch: S ist ergodisch. Die Ergodizität von S ist übrigens eine einfache Folgerung der Mischungseigenschaft von S[4]). Der Ergodensatz liefert wegen (2.2) sofort[5])

Hilfssatz 3.1. *Die auf* X *erklärte, reellwertige Funktion* f *sei absolut* Lebesgue-*integrierbar; für fast alle* $\xi \in X$ *gilt dann*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(S^k(\xi)\right) = \frac{1}{\log 2} \int_0^1 \frac{f(\sigma)}{1+\sigma}\, d\sigma.$$

Es sei $k \in \mathbb{N}$; in Hilfssatz 3.1 wähle man f als die charakteristische Funktion der Menge $\{\xi \in X\colon a(\xi) = k\}$; für $\xi \in X$ ist also

$$f(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \dfrac{1}{k+1} < \xi < \dfrac{1}{k} \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$$

Hilfssatz 3.1 ergibt: für fast alle $\xi \in X$ ist die relative Häufigkeit, mit der k als ein $a_j(\xi)$ in (1.1) auftritt, gleich

(3.2) $$\frac{1}{\log 2} \log \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$$

Summation über k in (3.2) gibt natürlich 1.

In Hilfssatz 3.1 wähle man $f(\xi) = \log a(\xi)$ und erhält: für fast alle $\xi \in X$ gilt in (1.1) die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1(\xi)\ldots a_n(\xi)} = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{\log 2} \log\left(1 + \frac{1}{k^2+2k}\right)\right).$$

---

[4]) Vgl. etwa [1], S. 12.

[5]) Vgl. etwa [1], S. 13.

Für $\xi \in X$, $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $q_n(\xi)$ den Nenner und $p_n(\xi)$ den Zähler der rationalen Zahl

$$\cfrac{1}{a_1(\xi)+\cfrac{1}{a_2(\xi)+\cdot_{\cdot_{\cdot}}+\cfrac{1}{a_n(\xi)}}};$$

in Hilfssatz 3.1 wähle man $f(\xi) = \log \xi$ und erhält: für fast alle $\xi \in X$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log q_n(\xi) = \frac{\pi^2}{12 \log 2}. \tag{3.3}$$

Wegen der geläufigen Ungleichungen

$$\left(q_n(\xi)\left(q_{n+1}(\xi)+q_n(\xi)\right)\right)^{-1} < \left|\xi - \frac{p_n(\xi)}{q_n(\xi)}\right| < \left(q_n(\xi)\left(q_{n+1}(\xi)-q_n(\xi)\right)\right)^{-1} \qquad (n \geq 1)$$

folgt aus (3.3) noch: für fast alle $\xi \in X$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log\left|\xi - \frac{p_n(\xi)}{q_n(\xi)}\right| = -\frac{\pi^2}{6 \log 2}.$$

Die hier gegebenen Anwendungen waren alle schon 1940 bekannt. Man sollte hier noch Khintschin und Doeblin erwähnen. Von Verschärfungen (etwa mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes) und weiteren Ergebnissen (wie etwa durch W. Philipp, Galambos und andere) sehen wir hier ab.

§ 4. Es sei $Y := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ bezeichne $]\alpha[$ die durch $\alpha - \frac{1}{2} \leq]\alpha[< \alpha + \frac{1}{2}$ charakterisierte Zahl aus $\mathbb{Z}$; $]\alpha[$ heißt das nächste Ganze von α. Für $\xi \in Y$ sei

$$\varepsilon(\xi) := \operatorname{sgn} \xi,\ b(\xi) := \left]\frac{1}{|\xi|}\right[,\ T(\xi) := \frac{1}{|\xi|} - b(\xi);$$

dann ist

$$\varepsilon(\xi) \in \{-1, 1\},\ 2 \leq b(\xi) \in \mathbb{Z},\ T(\xi) \in Y,\ b(\xi) + T(\xi) \geq 2,\ \xi = \frac{\varepsilon(\xi)}{b(\xi) + T(\xi)}.$$

So macht man weiter durch Iteration und erhält mit $b_n(\xi) := b\left(T^{n-1}(\xi)\right)$ durch Grenzübergang

$$\xi = \cfrac{\varepsilon_1(\xi)}{b_1(\xi) + \cfrac{\varepsilon_2(\xi)}{b_2(\xi) + \cdot_{\cdot_{\cdot}}}} \quad \text{O} \cdot \tag{4.1}$$

Im Zusammenhang mit (4.1) sagt man, daß $\xi \in Y$ in einen Kettenbruch nach nächsten Ganzen entwickelt worden sei. T heißt Shift bei Kettenbrüchen nach nächsten Ganzen, deren Theorie man weitgehend Hurwitz [7] verdankt[6]). Vermöge

[6]) Vgl. auch [12], § 43.

$$\xi \mapsto \begin{pmatrix} \varepsilon_1(\xi), \varepsilon_2(\xi), \ldots \\ b_1(\xi), b_2(\xi), \ldots \end{pmatrix}$$

erhält man eine bijektive Abbildung zwischen Y und der Menge aller Folgen

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \\ b_1, b_2, \ldots \end{pmatrix}$$

mit

$$\text{(4.2)} \qquad \varepsilon_n \in \{-1,1\},\ 2 \leq b_n \in \mathbb{Z},\ b_n + \varepsilon_{n+1} \geq 2 \qquad (n \geq 1).$$

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \alpha \leq 1$ und für $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ sei

$$H_n(\xi) := \begin{cases} \lambda\{\xi \in Y : 0 \leq T^n(\xi) \leq \alpha\} & \text{falls } \alpha \leq \frac{1}{2} \\ \lambda\{\xi \in Y : 0 \leq T^n(\xi) \leq \frac{1}{2} \vee -\frac{1}{2} \leq T^n(\xi) \leq \alpha - 1\} & \text{falls } \alpha > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Man hat $H_o(\alpha) = \alpha\ (0 \leq \alpha \leq 1)$ und die Rekursionsformel

$$\text{(4.3)} \qquad H_{n+1}(\alpha) = \sum_{k=2}^{\infty} \left(H_n\left(\frac{1}{k}\right) - H_n\left(\frac{1}{k+\alpha}\right) + H_n\left(1 - \frac{1}{k+\alpha}\right) - H_n\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right)$$
$$(0 \leq \alpha \leq 1,\ n \geq 0).$$

Es sei $G := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ („Goldener Schnitt"). Man gelangt zu einer richtigen Formel, wenn man in (4.3) sowohl $H_{n+1}(\alpha)$ als auch $H_n(\alpha)$ durch $\log \frac{G+\alpha}{G}$ ersetzt.

In [16] wird in Analogie zu (1.5) bewiesen: es existiert eine reelle Zahl $C_8 > 1$ derart, daß für $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\text{(4.4)} \qquad H_n(\alpha) = \frac{\log \frac{G+\alpha}{G}}{\log G} + O(C_8^{-n})$$

mit einer absoluten Konstanten in O ( ).

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$ sei

$$\varrho(\alpha) := \begin{cases} (G+\alpha)^{-1} & \text{falls } \alpha \geq 0 \\ (G+1+\alpha)^{-1} & \text{falls } \alpha < 0. \end{cases}$$

Für jedes Lebesgue-meßbare $E \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ sei

$$\nu(E) := \frac{1}{\log G} \int_E \varrho(\alpha)\, d\alpha.$$

Es ist $\nu([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) = 1$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$ findet man in Analogie zu (2.2) leicht

$$\text{(4.5)} \qquad \nu(T^{-1}[0,\alpha]) = \nu([0,\alpha]).$$

Wegen (4.5) heißt ν das bei T invariante Maß. Unter Fortführung der Methode von [16] wird in [18] analog zu Satz 2.1 die (gleichmäßige) Mischungseigenschaft von T bezüglich ν bewiesen. Insbesondere ist dann T ergodisch, und statt Hilfssatz 3.1 hat man jetzt

Hilfssatz 4.1. *Die auf* Y *erklärte, reellwertige Funktion* f *sei absolut* Lebesgue-*integrierbar; für fast alle* $\xi \in Y$ *gilt dann*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(T^k(\xi)\right) = \frac{1}{\log G} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(\sigma)\,\varrho(\sigma)\,d\sigma.$$

Wir geben jetzt einige Anwendungen von Hilfssatz 4.1, die denen von Hilfssatz 3.1 entsprechen.

Im Hinblick auf (4.2) sei

$$2 \leq b \in \mathbb{Z},\ \varepsilon \in \{-1,1\},\ b+\varepsilon \geq 2; \tag{4.6}$$

für fast alle $\xi \in Y$ ist dann die relative Häufigkeit, mit der das Paar b, ε als ein Paar $b_j(\xi), \varepsilon_{j+1}(\xi)$ in (4.1) auftritt, gleich

$$H_{b,\varepsilon} := \frac{1}{\log G} \log \frac{(4b+\varepsilon-3+2\sqrt{5})\ (4b+\varepsilon-5+2\sqrt{5})}{(4b+\varepsilon-7+2\sqrt{5})\ (4b+\varepsilon-1+2\sqrt{5})}. \tag{4.7}$$

Summation über (4.6) in (4.7) gibt natürlich 1.

Für fast alle $\xi \in Y$ gilt in (4.1) die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_1(\xi)\ldots b_n(\xi)} = \exp\left(\sum_{(4.6)} H_{b,\varepsilon} \log b\right)$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\varepsilon_1(\xi)+\ldots+\varepsilon_n(\xi)\right) = \frac{1}{\log G} \log \frac{G^3}{4}. \tag{4.8}$$

Für $\xi \in Y$, $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $Q_n(\xi)$ den Nenner und $P_n(\xi)$ den Zähler der rationalen Zahl

$$\cfrac{\varepsilon_1(\xi)}{b_1(\xi)+\cfrac{\varepsilon_2(\xi)}{b_2(\xi)+\ddots+\cfrac{\varepsilon_n(\xi)}{b_n(\xi)}}};$$

für fast alle $\xi \in Y$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Q_n(\xi) = \frac{\pi^2}{12 \log G} \tag{4.9}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left|\xi - \frac{P_n(\xi)}{Q_n(\xi)}\right| = -\frac{\pi^2}{6 \log G}.$$

Auch hier sehen wir von Verschärfungen und weiteren Ergebnissen ab.

§ 5. Es sei $\beta := 2-G$, $W := [-\beta, 1-\beta] \setminus \mathbb{Q}$. Für $\xi \in W$ sei

$$\varepsilon(\xi) := \operatorname{sgn} \xi,\ c(\xi) := [\frac{1}{|\xi|} + \beta],\ U(\xi) := \frac{1}{|\xi|} - c(\xi);$$

dann ist

$$\varepsilon(\xi) \in \{-1, 1\},\ 2 \leq c(\xi) \in \mathbb{Z},\ U(\xi) \in W,\ \varepsilon(\xi) + c(\xi) \geq 2,\ \xi = \frac{\varepsilon(\xi)}{c(\xi) + U(\xi)}.$$

So macht man weiter durch Iteration und erhält mit $c_n(\xi) := c\left(U^{n-1}(\xi)\right)$ durch Grenzübergang

$$\xi = \cfrac{\varepsilon_1(\xi)}{c_1(\xi) + \cfrac{\varepsilon_2(\xi)}{c_2(\xi) + \ddots}} \tag{5.1}$$

Im Zusammenhang mit (5.1) sagt man, daß $\xi \in W$ in einen singulären Kettenbruch entwickelt worden sei. U heißt Shift bei singulären Kettenbrüchen. Auch ihre Theorie verdankt man weitgehend Hurwitz [7], der den engen Zusammenhang mit den Kettenbrüchen nach nächsten Ganzen hervorhebt[7]). Vermöge

$$\xi \mapsto \begin{pmatrix} \varepsilon_1(\xi), \varepsilon_2(\xi), \ldots \\ c_1(\xi), c_2(\xi), \ldots \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

erhält man eine bis auf abzählbar viele (und explizit angebbare) Ausnahmen bijektive Abbildung zwischen W und der Menge aller Folgen

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \\ c_1, c_2 \ldots \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

mit

$$\varepsilon_n \in \{-1, 1\},\ 2 \leq c_n \in \mathbb{Z},\ \varepsilon_n + c_n \geq 2 \qquad (n \geq 1). \tag{5.4}$$

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \alpha \leq 1$ und $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ sei

$$K_n(\alpha) := \lambda\,\{\xi \in W : -\beta \leq U^n(\xi) \leq \alpha - \beta\}\ \circ\,.$$

Man hat $K_0(\alpha) = \alpha$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ und die Rekursionsformel

$$K_{n+1}(\alpha) = \sum_{k \geq 2} \left(K_n(\beta + \frac{1}{k-\beta}) - K_n(\beta + \frac{1}{k-\beta+\alpha})\right) + \sum_{k \geq 3} \left(K_n(\beta - \frac{1}{k-\beta+\alpha}) - K_n(\beta - \frac{1}{k-\beta})\right) \qquad (0 \leq \alpha \leq 1,\ n \geq 0). \tag{5.5}$$

Man gelangt zu einer richtigen Formel, wenn man in (5.5) sowohl $K_{n+1}(\alpha)$ als auch $K_n(\alpha)$ durch $\log \frac{G+\alpha}{G}$ ersetzt.

[7]) Vgl. auch [12], § 44.

In [17] wird in Analogie zu (1.5) und (4.4) bewiesen: es existiert eine reelle Zahl $C_9 > 1$ derart, daß für $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$K_n(\alpha) = \frac{\log \frac{G+\alpha}{G}}{\log G} + O(C_9^{-n})$$

mit einer absoluten Konstanten in O ( ).

Auf Mischung bei U wollen wir hier nicht eingehen; aus dieser würde wieder die Ergodizität von U folgen. Stattdessen beweisen wir die Ergodizität von U direkt mit der Methode von [9]; im Hinblick auf (3.1) beweisen wir

Satz 5.1 *Es sei* $E \subset W$ *eine* Borel-*Menge mit* $U^{-1}(E) = E$ *und* $\lambda(E) < 1$*; dann ist* $\lambda(E) = 0$.

Beweis. Zu (5.3) mit (5.4) erhält man noch p_n, q_n $(n \geq -1)$ vermöge

$$\text{(5.6)} \qquad \begin{aligned} &p_{-1} := 1,\ p_0 := 0,\ p_n := c_n p_{n-1} + \varepsilon_n p_{n-2} && (n > 0), \\ &q_{-1} := 0,\ q_0 := 1,\ q_n := c_n q_{n-1} + \varepsilon_n q_{n-2} && (n > 0). \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\frac{p_n + \tau p_{n-1}}{q_n + \tau q_{n-1}} = \cfrac{\varepsilon_1}{c_1 + \cfrac{\varepsilon_2}{c_2 + \ddots + \cfrac{\varepsilon_n}{c_n + \tau}}}$$

und daher

$$\text{(5.7)} \qquad U^n\left(\frac{p_n + \tau p_{n-1}}{q_n + \tau q_{n-1}}\right) = \tau \qquad (\tau \in W,\ n \geq 0).$$

Es bezeichne χ die charakteristische Funktion von W; wegen $U^{-1}(E) = E$ und wegen (5.7) ist

$$\text{(5.8)} \qquad \chi\left(\frac{p_n + \tau p_{n-1}}{q_n + \tau q_{n-1}}\right) = \chi(\tau) \qquad (\tau \in W).$$

Zu (5.3) und $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ erklären wir

$$I_n := \left[\frac{p_n - \beta p_{n-1}}{q_n - \beta q_{n-1}},\ \frac{p_n + (1-\beta) p_{n-1}}{q_n + (1-\beta) q_{n-1}}\right].$$

Wegen (5.6) ist

$$\text{(5.9)} \qquad \lambda(I_n) = (q_n - \beta q_{n-1})^{-1} (q_n + (1-\beta) q_{n-1})^{-1} < 2^{1-2n} \qquad (n \geq 0).$$

Es ist

$$\lambda(E \cap I_n) = \int_{I_n} \chi(\sigma)\, d\sigma$$

$$= \int_{-\beta}^{1-\beta} \chi\left(\frac{p_n+\tau p_{n-1}}{q_n+\tau q_{n-1}}\right)(q_n+\tau q_{n-1})^{-2}\,d\tau$$

(durch Parametrisierung von I_n)

$$= \int_{-\beta}^{1-\beta} \chi(\tau)\,(q_n+\tau q_{n-1})^{-2}\,d\tau \quad \big(\text{wegen } (5.8)\big).$$

Da die Funktion $\tau \mapsto (q_n+\tau q_{n-1}{}^{-2})$ auf $[-\beta, 1-\beta]$ abnimmt, folgt mit $\delta := \lambda(E)$ sofort

$$\lambda(E \cap I_n) \leq \int_{-\beta}^{\delta-\beta} (q_n+\tau q_{n-1})^{-2}\,d\tau$$

$$= \delta\,(q_n-\beta\, q_{n-1})^{-1}\,\big(q_n+(\delta-\beta)\,q_{n-1}\big)^{-1}.$$

Mit (5.9) ergibt das

$$\frac{\lambda(E \cap I_n)}{\lambda(I_n)} \leq 1 - \frac{(1-\delta)\,(q_n-\beta\, q_{n-1})}{q_n+(\delta-\beta)\,q_{n-1}}$$

$$\leq C_1(\delta) := 1 - \frac{1-\delta}{1+\delta}. \tag{5.10}$$

Wir gehen jetzt aus von $\xi \in W$; die $\varepsilon_n(\xi)$, $c_n(\xi)$ $(n \geq 1)$ aus (5.2) verwenden wir in (5.3) und erhalten vermöge (5.6) dann $p_n(\xi)$, $q_n(\xi)$ $(n \geq 1)$[8]. Es ist

$$\xi = \frac{p_n(\xi)+U^n(\xi)\,p_{n-1}(\xi)}{q_n(\xi)+U^n(\xi)\,q_{n-1}(\xi)}$$

und daher

$$\xi \in I_n(\xi) := \left[\frac{p_n(\xi)-\beta p_{n-1}(\xi)}{q_n(\xi)-\beta q_{n-1}(\xi)},\ \frac{p_n(\xi)+(1-\beta)\,p_{n-1}(\xi)}{q_n(\xi)+(1-\beta)\,q_{n-1}(\xi)}\right];$$

wegen (5.9) ist $\lambda\big(I_n(\xi)\big) < 2^{1-2n}$; es folgt, daß die für alle Folgen (5.3) mit (5.4) und alle $n \geq 0$ gebildeten Intervalle I_n die Borel-Mengen von W erzeugen. Die Annahme $0 < \delta < 1$ führt auf $C_1(\delta) < 1$, und (5.10) ist dann wegen des Lebesgueschen Dichtesatzes ein Widerspruch.

Den letzten Schluß kann man sich auch leicht direkt klar machen: für die zum Erzeugen der Borel-Menge E herangezogenen I_n kann nicht stets $\lambda(E \cap I_n) \leq C_1(\delta)\,\lambda(I_n)$ mit $C_1(\delta) < 1$ gelten.

Für jedes Lebesgue-meßbare $E \subset [-\beta, 1-\beta]$ sei

$$\mu(E) := \frac{1}{\log G}\int_E \frac{d\alpha}{2+\alpha}.$$

[8]) Eine Verwechslung mit $q_n(\xi)$ im Sinn von § 3 ist nicht zu befürchten.

Es ist $\mu([-\beta, 1-\beta]) = 1$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \alpha \leq 1$ ist

$$U^{-1}([-\beta, \alpha-\beta]) = \bigcup_{k\geq 2} \left[\frac{1}{k-\beta}, \frac{1}{k-\beta+\alpha}\right] \cup \bigcup_{k\geq 3} \left[\frac{-1}{k-\beta}, \frac{-1}{k-\beta+\alpha}\right],$$

und in Analogie zu (2.2) und (4.5) findet man

$$(5.10) \qquad \mu(U^{-1}[-\beta, \alpha-\beta]) = \mu([-\beta, \alpha-\beta]).$$

Wegen (5.10) heißt μ das bei U invariante Maß. Wegen Satz 5.1 und wegen (5.10) liefert der Ergodensatz sofort

Hilfssatz 5.1. *Die auf* W *erklärte, reellwertige Funktion* f *sei absolut* Lebesgue-*integrierbar; für fast alle* $\xi \in W$ *gilt dann*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(U^k(\xi)\right) = \frac{1}{\log G} \int_{-\beta}^{1-\beta} \frac{f(\sigma)}{2+\sigma}\, d\sigma.$$

Die Anwendungen von Hilfssatz 5.1 entsprechen weitgehend denen von Hilfssatz 4.1.

Für fast alle $\xi \in W$ ist die relative Häufigkeit, mit der das Paar ε, b mit (4.6) als ein Paar $\varepsilon_j(\xi)$, $c_j(\xi)$ in (5.1) auftritt, gleich $H_{b,\varepsilon}$. Für fast alle $\xi \in W$ gilt in (5.1) die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_1(\xi)\ldots c_n(\xi)} = \exp\Big(\sum_{(4.6)} H_{b,\varepsilon} \log b\Big)$$

und (4.8).

Auch hier sehen wir von Verschärfungen und weiteren Anwendungen ab.

Im bisherigen haben wir uns mit der Entwicklung irrationaler Zahlen in regelmäßige Kettenbrüche, in Kettenbrüchen nach nächsten Ganzen und in singuläre Kettenbrüche befaßt, die sich alle als nicht abbrechend herausgestellt haben. Wir wollen uns jetzt mit neueren Ergebnissen befassen, die sich auf rationale Zahlen und damit abbrechende Kettenbrüche beziehen.

Teil 2. Kettenbrüche rationaler Zahlen

§ 6. Es sei $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, $a < b$, $(a, b) = 1$; auf Grund des euklidischen Algorithmus gibt es eindeutig bestimmte ganze Zahlen $n > 0$, $a_1 > 0, \ldots, a_{n-1} > 0$, $a_n > 1$ mit

$$(6.1) \qquad \frac{a}{b} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{\ddots}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} \quad \circ\cdot$$

Statt (1.1) hat man also jetzt (6.1), und man sagt, daß $\frac{a}{b}$ in einen regelmäßigen Kettenbruch entwickelt worden sei. $E(a,b) := n$ heißt die Länge des regelmäßigen Kettenbruches für $\frac{a}{b}$. Es bezeichnet φ die Funktion von Euler, und es sei

$$\sigma(b) := \sum_{d|b} d^{-1}.$$

Nach Heilbronn [6] gilt

$$(6.2) \qquad \sum_{\substack{a=1\\(a,b)=1}}^{b} E(a,b) = \frac{12\log 2}{\pi^2}\varphi(b)\log b + O\Big(b\left(\sigma(b)\right)^3\Big).$$

Bei gegebenem b ist also $E(a,b)$ in diesem Sinn durchschnittlich gleich $\frac{12\log 2}{\pi^2}\log b$.

Für $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, $a<b$, $(a,b)=1$, $k \in \mathbb{N}$ bezeichne $L(a,b;k)$ die Anzahl der j $\left(1 \le j \le E(a,b)\right)$ in (6.1) mit $a_j = k$. Nach [6] gilt

$$(6.3) \qquad \sum_{\substack{a=1\\(a,b)=1}}^{b} L(a,b;k) = \frac{12}{\pi^2}\left(\log\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right)\varphi(b)\log b + O_k\Big(b\left(\sigma(b)\right)^3\Big)$$

mit einer höchsten von k abhängigen Konstanten in $O_k(\ )$.

Die Beweise von (6.2) und (6.3) ruhen auf einer Abschätzung der Anzahl der Lösungen x_1, z_1, x_2, z_2 aus $\mathbb{N}$ von $x_1 z_1 + x_2 z_2 = b$ unter gewissen Nebenbedingungen.

Wir verweisen auch auf [24].

Nach Porter [13] existiert ein $C_{10} \in \mathbb{R}$ derart, daß für jedes $b \in \mathbb{N}$ und jedes reelle $\eta > 0$ über (6.2) hinaus gilt

$$(6.4) \qquad \sum_{\substack{a=1\\(a,b)=1}}^{b} E(a,b) = \frac{12\log 2}{\pi^2}\varphi(b)\log b + C_{10}\varphi(b) + O_\eta\left(b^{\frac{5}{6}+\eta}\right)$$

mit einer höchstens von η abhängigen Konstanten in $O_\eta(\ )$.

Eine entsprechende Verschärfung ist für (6.3) zu erwarten.

Wir möchten jetzt plausibel machen, warum die Zahl $\omega := \frac{\pi^2}{12\log 2}$ aus (3.3) in (6.2) wieder auftritt. Wir ignorieren „lim" und „fast" in (3.3) und haben

$$\log q_n(\xi) \approx \omega n.$$

Für $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, $a \le b$, $(a,b)=1$ ist natürlich

$$q_{E(a,b)}\left(\tfrac{a}{b}\right) = b.$$

Durch Einsetzen kommt

$$\log b = \log q_{E(a,b)}\left(\tfrac{a}{b}\right) \approx \omega E(a,b),$$

$$\sum_{\substack{a=1\\(a,b)=1}}^{b} E(a,b) \approx \omega^{-1}\varphi(b)\log b.$$

Einen ähnlichen plausiblen Zusammenhang hat man zwischen (6.3) und (3.2).

Auf ganz elementarem Weg zeigt Dixon [3]: Für $x \geq 2$ ist die Anzahl der Paare $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ mit $a < b \leq x$, welche

$$\frac{1}{2}\log b \leq E(a,b) \leq \frac{1+\log b}{\log G}$$

nicht erfüllen, höchsten $5x^{1{,}99}$. Unter Verwendung eines Ergebnisses von Philipp, beweist Dixon [2]: Für jedes reelle $\eta > 0$ gibt es ein reelles $C_2(\eta) > 0$ derart, daß die Anzahl der Paare $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ mit $a < b \leq x$ und

$$\left|E(a,b) - \frac{12\log 2}{\pi^2}\log b\right| \geq (\log b)^{\frac{1}{2}+\eta}$$

höchstens $x^2 \exp\left(-C_2(\eta)(\log x)^{\frac{\eta}{2}}\right)$ ist $(x \geq 2)$.

§ 7. Es sei $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, $2a \leq b$, $(a,b)=1$; auf Grund des Algorithmus nach nächsten Ganzen gibt es eindeutig bestimmte ganze Zahlen $n > 0$, $a_1, \varepsilon_2, a_2, \ldots, \varepsilon_n, a_n$ mit

$$\frac{a}{b} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{\varepsilon_2}{a_2 + \cdots + \cfrac{\varepsilon_n}{a_n}}} \tag{7.1}$$

und

$$|\varepsilon_j| = 1\ (2 \leq j \leq n),\ a_j \geq 2\ (1 \leq j \leq n),\ a_j + \varepsilon_{j+1} \geq 2\ (1 \leq j \leq n),\ \frac{\varepsilon_n}{a_n} \neq -\frac{1}{2}.$$

Statt (4.1) hat man also jetzt (7.1), und man sagt, daß $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch nach nächsten Ganzen entwickelt worden sei. $N(a,b) := n$ heißt die Länge des Kettenbruches nach nächsten Ganzen für $\frac{a}{b}$. Nach Rieger [15] gilt

$$\sum_{\substack{1 \leq a \leq \frac{b}{2}\\(a,b)=1}} N(a,b) = \frac{6\log G}{\pi^2}\varphi(b)\log b + O\left(b\left(\sigma(b)\right)^3\right). \tag{7.2}$$

Bei gegebenem b ist also $N(a,b)$ in diesem Sinn durchschnittlich gleich $\frac{12\log G}{\pi^2}\log b$. Im Hinblick auf $\frac{\log G}{\log 2} = 0{,}694\ldots$ vergleiche man das mit der Bemerkung im Anschluß an (6.2) und noch mit dem Satz von Kronecker und Vahlen[9]), wonach stets gilt $N(a,b) \leq E(a,b)$.

[9]) Vgl. etwa [12], S. 145.

Für $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, $2a \leq b$, $(a,b) = 1$, $2 \leq k \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon \in \{-1,1\}$, $k+\varepsilon \geq 2$ bezeichne $L(a, b; k, \varepsilon)$ die Anzahl der j $\left(1 \leq j < N(a,b)\right)$ in (7.1) mit $a_j = k$, $\varepsilon_{j+1} = \varepsilon$. Nach [15] gilt

$$\sum_{\substack{1 \leq a \leq \frac{b}{2} \\ (a,b)=1}} L(a, b; k, \varepsilon) = \frac{6}{\pi^2} (\log G)\, H_{k,\varepsilon}\, \varphi(b) \log b + O_k\left(b\left(\sigma(b)\right)^3\right) \tag{7.3}$$

mit einer höchstens von k abhängigen Konstanten in $O_k(\,)$.

Nach dem Vorbild von (6.4) ist mit der Methode von [13] eine Verschärfung von (7.2) und (7.3) zu erwarten[10]).

Auch hier läßt sich eine plausible Verbindung zwischen (7.2) und (4.9) einerseits und zwischen (7.3) und (4.7) andererseits herstellen.

Nach dem Vorbild von (5.1) kann man jetzt auch rationale Zahlen in einen singulären Kettenbruch entwickeln. In Richtung (7.2) kommt dabei nichts Neues, da nach einem Satz von Tietze[11]) dasselbe n wie in (7.1) entsteht. Ähnliches gilt für (7.3).

Mit der Methode von [3] wird in [19] gezeigt: es gibt (explizit angebbare) reelle Zahlen $C_{11} > 0$, $C_{12} > 0$, $C_{13} > 0$ derart, daß die Anzahl der Paare $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ mit $2a < b \leq x$, welche

$$C_{11} \log b < N(a,b) < \frac{\log 3b}{\log(1+\sqrt{2})} - 1$$

nicht erfüllen, höchstens $C_{12} x^{2-C_{13}}$ ist $(x \geq 2)$. Mit Hilfe von [2] ist zu erwarten: für jedes reelle $\eta > 0$ gibt es ein reelles $C_3(\eta) > 0$ derart, daß die Anzahl der Paare $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ mit $2a < b \leq x$ und

$$\left|N(a,b) - \frac{12 \log G}{\pi^2} \log b\right| \geq (\log b)^{\frac{1}{2}+\eta}$$

höchstens $x^2 \exp\left(-C_3(\eta)(\log x)^{\frac{\eta}{2}}\right)$ ist $(x \geq 2)$.

Abschließend ist zu sagen, daß wir in unserer Übersicht keineswegs Vollständigkeit erstrebt haben. Auch wurde auf Beweise weitgehend verzichtet. Man hätte noch viel Verwandtes einbeziehen können wie etwa den Jacobi-Perron-Algorithmus, den man auch mehrdimensionalen euklidischen Algorithmus nennen könnte[12]); in Analogie zu [9] hat man Ergodizität; man kennt aber weder ein Gauß-Maß noch einen Satz von Gauß-Kusmin-Lévy. Zusammenfassend sei bemerkt, daß die durch den oben erwähnten Brief von Gauß an Laplace eingeleitete metrische Theorie der Kettenbrüche ein wichtiges Bindeglied zwischen Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitslehre ist. Auf die bahnbrechenden Beiträge von Gauß zu diesen beiden Gebieten und die daran anschließende Entwicklung sind wir überhaupt nicht eingegangen; wir verweisen dafür auf [14] und [5].

---

[10]) Vgl. die Dissertation P. Houtermans, Hannover 1977.

[11]) Vgl. etwa [12], S. 173.

[12]) Vgl. etwa [20].

Literatur

[1] P. Billingsley, Ergodic theory and information. New York–London–Sydney 1965.

[2] J. D. Dixon, The number of steps in the euclidean algorithm. J. Number Theory *2*, 414–422, 1970.

[3] J. D. Dixon, A simple estimate for the number of steps in the euclidean algorithm. Am. Math. Monthly, 374–376, 1971.

[4] Gauß-Werke X/1. Göttingen 1917.

[5] B.W. Gnedenko, Über die Arbeiten von C.F. Gauß zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. Gauß-Gedenkband. Leipzig 1957, S. 193–204.

[6] H. Heilbronn, On the averge length of a class of finite continued fractions. Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis (zur Erinnerung an Edmund Landau). Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1968, S. 89–96.

[7] A. Hurwitz, Über eine besondere Art der Kettenbruch-Entwicklung reeller Größen. Acta Math. 12, 367–405, 1889 (= Math. Werk II, S. 84–115).

[8] I. A. Ibragimov and Yu. V. Linnik, Independent and stationary sequences of random variables. Groningen 1971.

[9] K. Knopp, Mengentheoretische Behandlung einiger Probleme der diophantischen Approximationen und der transfiniten Wahrscheinlichkeiten. Math. Ann. *95*, 409–426, 1926.

[10] R.O. Kuzmin, Sur une problème de Gauss. Atti Congr. Intern. Bologne *6*, 83–89, 1928.

[11] P. Lévy, Sux le loi de probabilite dont dependents les quotients complets et incomplèts d'une fraction continué. Bull. Soc. Math. France *57*, 178–194, 1929.

[12] O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen. Stuttgart 1954, 3. Auflage.

[13] J. W. Porter, On a theorem of Heilbronn, Mathematika *22*, 20–28, 1975.

[14] G. J. Rieger, Die Zahlentheorie bei Gauß. Gauß-Gedenkband. Leipzig 1957, S. 37–77.

[15] G.J. Rieger, Über die mittlere Schrittanzahl bei Divisionsalgorithmen. Math. Nachr. (erscheint demnächst).

[16] G. J. Rieger, Ein Satz von Gauß-Kusmin-Lévy für Kettenbrüche nach nächsten Ganzen. Math. Ann. (erscheint demnächst).

[17] G. J. Rieger, Ein Satz von Gauß-Kusmin-Lévy für die singulären Kettenbrüche im Sinne von Hurwitz. Abh. Braunschweigische Wiss. Ges. (im Druck).

[18] G.J. Rieger, Mischung und Ergodizität bei Kettenbrüchen nach nächsten Ganzen. (Eingereicht).

[19] G. J. Rieger, Einfache Abschätzungen für die Schrittanzahl bei einigen Algorithmen. (Eingereicht).

[20] F. Schweiger, The metrical theory of Jacobi-Perron algorithm. Berlin–Heidelberg–New York 1973.

[21] P. Szüsz, Über einen Kusminischen Satz. Acta Math. Acad. Sci. Hung. *12*, 447–453, 1961.

[22] P. Szüsz, On Kuzmin's theoren. II. Duke Math. J. *35*, 535–540, 1968.

[23] Eduard Wirsing, On a theorem of Gauss-Kusmin-Lévy and a Frobenius-type theorem for function spaces. Acta Arithmetica *24*, 507–516, 1974.

[24] A.C. Yao and D.E. Knuth, Analysis of the subtractive algorithm for greatest common dividors. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, *72*, 4720–4722, 1975.